Capitolul 2

Surse Markov

2.1 Breviar teoretic

Fie o sursă având alfabetul $[X] = [x_1 x_2 \dots x_D]$. Sursa este **Markov de ordinul** k daca se respectă relaţia:

$$p(x_{i_n}/x_{i_{n-1}}x_{i_{n-2}})\dots x_{i_0}) = p(x_{i_n}/x_{i_{n-1}}x_{i_{n-2}})\dots x_{i_{n-k}})) \tag{2.1}$$

unde cu $p(x_{i_n})$ am notat probabilitatea ca la momentul n să se emita simbolul x_i.

O sursă Markov de ordinul k este, în fapt, o sursa discretă cu memorie unde şansa de a emite un simbol la momentul curent depinde ultimele k simboluri emise.

În practică, şi, în acest material, de interes sunt numai sursele Markov de ordinul 2 şi, mai ales de ordinul 1.

În continuare, daca nu vom specifica altfel, ne vom referi numai la surse Markov de ordinul 1.

Se spune că o sursă se găseşte la momentul n în starea i, dacă la momentul $n-1$ a emis simbolul x_i.

O sursă Markov este **omogenă** dacă probabilitatea de tranziţie între două stări i şi j nu depinde de momentul de timp la care se petrece tranziţia. Deci, pentru o sursă omogenă, tranziţiile dintre două momente de timp se caracterizează de acelaşi set de probabilităţi.

Considerând momentul prezent ca fiind n atunci avem setul de relaţii:

$$p(x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{D} p(x_{i_n}/x_{j_{n-1}}) \cdot p(x_{j_{n-1}}), (\forall) i = 1, n \tag{2.2}$$

Dacă sursa este omogenă, atunci, notăm:

$$p(x_{j_n}/x_{i_{n-1}}) = p(S_j/S_i) = p_{ij}$$

Dat fiind faptul că tot ce se află într-o stare la un moment de timp trebuie să se întâmple ceva cu el la momentul următor avem relaţia:

$$\sum_{j=1}^{D} p_{ij} = 1, (\forall) i \tag{2.3}$$

Tranziţia unei surse între două stări poate fi caracterizată în două moduri: printr-un graf de tranziţie al stărilor sau prin matricea de tranzitie.

La un moment de timp, n, o sursă poate fi caracterizată printr-un vector (coloană) de stare:

$$P_n = \begin{bmatrix} p(x_{1_n}) \\ p(x_{2_n}) \\ \dots \\ p(x_{D_n}) \end{bmatrix}$$

Relaţia 2.2 poate fi rescrisă matricial:

$$\begin{bmatrix} p(x_{1_n}) \\ p(x_{2_n}) \\ \dots \\ p(x_{D_n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_{1_n}/x_{1_{n-1}}) & p(x_{1_n}/x_{2_{n-1}}) & \dots & p(x_{1_n}/x_{D_{n-1}}) \\ p(x_{2_n}/x_{1_{n-1}}) & p(x_{2_n}/x_{2_{n-1}}) & \dots & p(x_{2_n}/x_{D_{n-1}}) \\ \dots & & & \\ p(x_{D_n}/x_{1_{n-1}}) & p(x_{D_n}/x_{2_{n-1}}) & \dots & p(x_{D_n}/x_{D_{n-1}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(x_{1_{n-1}}) \\ p(x_{2_{n-1}}) \\ \dots \\ p(x_{D_{n-1}}) \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow P_n = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{D1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{D2} \\ \dots & & & \\ p_{1D} & p_{2D} & \dots & p_{DD} \end{bmatrix} \cdot P_{n-1} \tag{2.4}$$

$$\Longleftrightarrow P_n = T^t \cdot P_{n-1}$$

unde cu T am notat **matricea de tranziţie** :

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1D} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{D2} \\ \dots & & & \\ p_{D1} & p_{D2} & \dots & p_{DD} \end{bmatrix}$$

Matricea de tranziţie este stochastică, adică are suma elementelor de pe linii 1, ceea ce, în faptm rezulta direct din relaţia 2.3. Dacă notăm cu P_0 vectorul stărilor la mometul 0, atunci obţinem:

$$P_n = \left(T^t\right)^n \cdot P_0 \tag{2.5}$$

Dacă o sursă omogenă, cu D stări, evoluază pe baza matricei de tranziţie:

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1D} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{D2} \\ \dots & & & \\ p_{D1} & p_{D2} & \dots & p_{DD} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

atunci trecerea ei de la o stare la alta poate fi descrisă, într-un mod mai intuitiv, cu ajutorul uni graf al stărilor. Acesta conţine în noduri stările sursei, iar pe muchii se notează probabilitatea de tranziţie din starea initiala în starea finală. Un exemplu de asemenea graf este in figura 2.1. De notat că relaţia 2.3 înseamnă, în graf, că suma probabilităţilor asociate muchiilor care ies din graf trebuie să fie 1.

Se poate arăta că orice sursă evoluază după un număr de tranziţii (momente de timp) într-o stare staţionară. O stare staţionară este caracterizată de un vector al starilor constant de la o tranziţie la alta. Convergenţa catre starea staţionară poate fi:

- monotonă (strict crescătoare, respectiv descrescătoare) către valoarea de echilibru;
- oscilantă, cu o perioadă finită, în jurul valorii de echilibru;

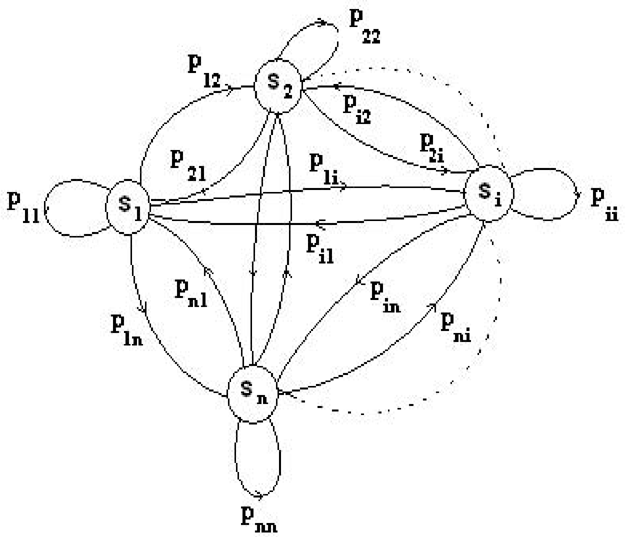

Figura 2.1: Exemplu: graful de tranzitie al stărilor asociat matricii de tranzitie definită de relaţia 2.6

2.2 Probleme rezolvate

1. [1] [7] *Fie o sursă Markov de ordinul 1. Sursa este omogenă, iar matricea de tran- ziţie asociată este cea dată de relaţia 2.6. Să se arate ca sursa acceptă stări staţionare.*

   Rezolvare:
   După cum am precizat starea staţionară este caracterizată de un set de proba- bilităţi ale stărilor care nu se mai modifică de la o tranziţie la alta. Adică:

$$P_{st} = T^t \cdot P_{st} \tag{2.7}$$

   Ecuaţia 2.7 ne aduce aminte de problema vectorilor si valorilor propri şi anume: dacă λ si V sunt o valoare proprie şi, respectiv, vectorul propriu corespunzator, al unei matrice A, atunci există relaţia:

$$A \cdot V = \lambda V$$

   Revenind la problema noastră este suficient să demonstrăm că matricea de tranziţie T acceptă $\lambda = 1$ ca valoare proprie, caz in care ecuaţia VVP (cu vectori si valori propri) se scrie sub forma

$$A \cdot V = V$$

   .

   După cum se ştie valorile propri ale unei matrici se definesc a fi soluţiile ecuaţiei caracteristice:

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

În cazul matricei de tranziţie dacă arătam că 1 este soluţie a ecuaţiei caracteristice problema este rezolvată. Deci:

$$det(T^t - \lambda \cdot I) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{21} & \dots & p_{D1} \\ p_{12} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{D2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1D} & p_{2D} & \dots & p_{DD} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Adunând primele $D - 1$ linii la ultima, se obţine relaţia echivalentă:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{21} & \dots & p_{D1} \\ p_{12} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{D2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\sum_{i=1}^{D} p_{1i}\right) - \lambda & \left(\sum_{i=1}^{D} p_{2i}\right) - \lambda & \dots & \left(\sum_{i=1}^{D} p_{Di}\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Aplicând relaţia 2.3, obţinem pe ultima linie $1 - \lambda$ ceea ce înseamnă ca 1 este într-adevar valoare proprie a matricei de tranziţie. De altfel, rezultatul este unul cunoscut, si anume că: orice matrice stochastică are o valoare proprie egală cu unitatea.

Se poate arăta că celelalte valori propri sunt de modul cel mult unitar: $|\lambda| \leq 1$.

Se poate face un studiu al convergenţei surselor Markov spre staţionaritate în functie de valorile propri ale matricei de tranziţie:

- dacă valorile propri sunt pozitive, ceea ce corespunde cazului când stările păstrează mai mult decât dau, $(p_{ii} \geq p_i j, i \neq j)$ sursa are o convergenţa monotonă spre staţionaritate.
- dacă valorile propri sunt negative, ceea ce corespunde cazului când stările dau mai mult decât păstrează ($p_{ii} \geq p_i j, i \neq j$), sursa are o convergenţa oscilantă spre staţionaritate.
- dacă valorile propri sunt 1, ceea ce corespunde unei matrice de tranziţie cu 1 pe diagonala principală (nu se schimbă nimic inte stări), sursa este staţionară de la început, în pozitia iniţială.
- dacă valorile propri sunt -1, ceea ce corespunde unei matrice de tranziţie cu 1 in alte poziţii faţă de diagonala principală (starile se schimbă total); sursa este permanent oscilantă.

2. [7] *O sursă Markov are un alfabet binar,* $[x_1x_2]$. *Graful de tranziţie este reprezentat în figura 2.2. Vectorul probabilităţilor iniţiale este*:

$$a.\ \ P_{0a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ sau } b.\ \ P_{0b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(a) *Care este probabilitatea ca sursa să genereze simbolul x_1 după 4 tranziţii?*

(b) *Care este vectorul de probabilităţi ce caracterizează starea staţionară?*

(c) *Cum trebuie modificate probabilitătile p_{21} şi p_{22} pentru sursa sa devină staţionară de la momentul 1 cu $P_{st} = P_{0a}$?*

(d) *Care este entropia sursei staţionare? Când această entropie este maximă?*

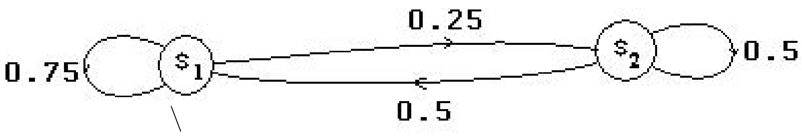

Figura 2.2: Graful de tranzitie al stărilor.

Rezolvare: Matricea de tranziţie asociată grafului este:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(a) Relatia 2.5 ne spune că este suficient să aflăm $(T^t)^4$ pentru a calcula probabilitatea cerută.

$$T^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(T^t\right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{10}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix}$$

$$\left(T^t\right)^4 = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{10}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{10}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{171}{256} & \frac{85}{256} \\ \frac{84}{256} & \frac{86}{256} \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \left(T^t\right)^4 \cdot P_0 = \begin{bmatrix} \frac{341}{512} \\ \frac{171}{512} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow p(x_{14}) = \frac{341}{512}$$

(b) Rezultatul de la problema 1 precizează că starea staţionară nu depinde de starea iniţială dec"zt dacă valorile proprii ale matricei de tranziţie sunt de modul 1. Nu este cazul in problema curentă. Să verificăm totuşi acest lucru.
În cazul în care $P_0 = P_{0a}$ obţinem:

$$P_{1a} = T^t \cdot P_{0a} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0.656 \\ 0.344 \end{bmatrix} \quad P_{3a} = \begin{bmatrix} 0.664 \\ 0.336 \end{bmatrix} \quad P_{4a} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.334 \end{bmatrix} \quad P_{5a} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.334 \end{bmatrix} \quad \ldots P_{st} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

În cazul în care $P_0 = P_{0b}$ obţinem:

$$P_{1b} = T^t \cdot P_{0b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.417 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b} = \begin{bmatrix} 0.656 \\ 0.344 \end{bmatrix} \quad P_{3b} = \begin{bmatrix} 0.645 \\ 0.345 \end{bmatrix} \quad P_{4b} = \begin{bmatrix} 0.662 \\ 0.338 \end{bmatrix} \quad P_{5b} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.334 \end{bmatrix} \quad \ldots P_{st} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Evolutia sursei în timp, în cele două cazuri, poate fi văzută şi in figura 2.3.

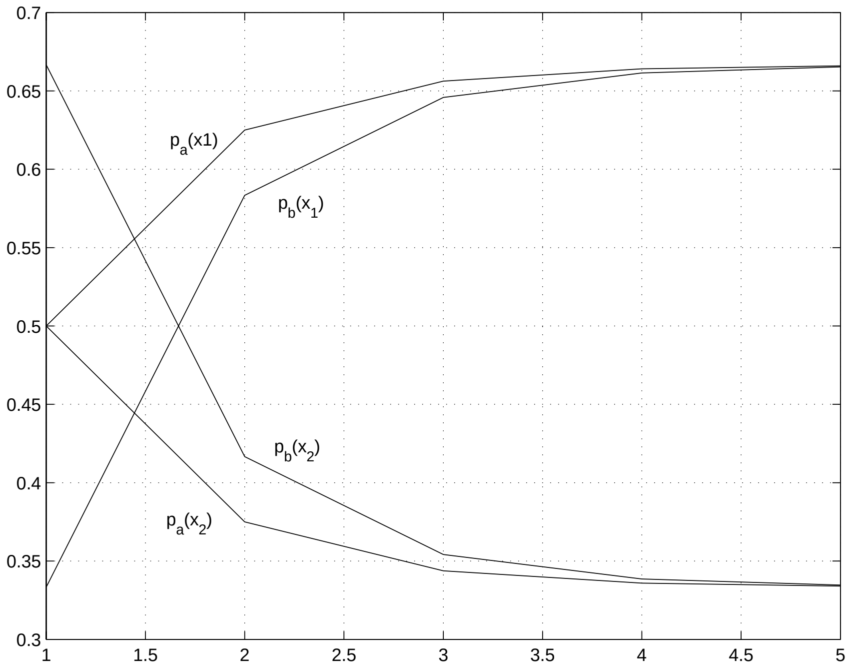

Figura 2.3: Starea stationară a sursei nu depinde de starea iniţială.

(c) Notăm $p_{21} = x$. Atunci $p_{22} = 1 - x$ şi matricea de tranzit devine:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ x & 1-x \end{bmatrix}$$

Cerinţa presupune că $P_1 = P_{0a} = T^t \cdot P_{0a}$.

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & x \\ \frac{1}{4} & 1-x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se obţin două ecuaţii:

$$\frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ambele ecuaţii acceptă soluţia $x = \frac{1}{4}$, pentru care matricea de tranzit devine:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(d) Entropia unei surse discrete fără memorie era usor de calculat pentru că, la orice moment de timp sursa emitea simbolurile cu aceleaşi probabilităţi, si se putea scrie o formulă stabilă. Pentru o sursă discretă cu memorie este mult mai dificil, deoarece la momente de timp diferite simbolurile sunt emise cu probabilităţi diferite şi, pe lângă medierea probabilistică ar mai trebui o medire temporală sau o jurnalizare a probabilităţilor la toate momentele de timp. Totuşi, dacă sursa este staţionară problema este aceiaşi cu cea de la sursele discrete fără memorie. Entropia sursei staţionare (mai ales în cazul de la punctul (c)) se calculează cu formula:

$$H(X_{st}) = -\sum_{i=1}^{n} p_{i_{st}} \log p_{i_{st}} = 1 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Entropia maximă se obţine pentru probabilităţi egale (ceea ce s-a şi întâmplat).

3. [4] *Fie o sursă Markov de ordinul 2. Sursa este binară şi complet determinată de probabilităţile condiţiontate:*

$$p(0|00) = p(1|11) = 0.8$$

$$p(1|00) = p(0|11) = 0.8$$

$$p(0|01) = p(0|11) = p(1|01) = p(1|10) = 0.5$$

Să se traseze graful de tranziţie al stărilor. Să se arate că sursa este staţionară şi să se calculeze vectorul staţionar.

Rezolvare:

Am precizat că, în cazul unei surse Markov de ordinul 1 starea este funcţie de ultimul simbol transmis. De data aceasta sursa este de ordinul 2 şi atunci starea este funcţie de ultimiii doi biţi transmişi. Fiind o sursa binară rezultă un alfabet al starilor cu 4 elemente. Convenim asupra urmatoarei codificări:

- starea S_0 înseamnă că la momentul $n-2$ s-a transmis 0, iar momentul $n-1$ tot 0; $S_0 = (00)$
- starea S_1 înseamnă că la momentul $n-2$ s-a transmis 0, iar momentul $n-1$, 1; $S_1 = (01)$
- $S_2 = (10)$
- $S_3 = (11)$

Ce înseamnă starile în cazul unie transmisiuni? Avem succesiunea de simboluri transmise de tipul $x_1x_2x_3$. Simbolul x_3 a fost transmis cu proba- bilitatea $p(x_3/x_1x_2)$. Simbolurile x_1x_2 codifică starea la momentul $n-1$, iar x_2x_3 starea la momentul n. Analizând setul de probabilităţi ce caracterizează sursa rezultă:

- s-a transmis succesiunea de simboluri 00 (starea S_0). După ele poate urma un simbol de :
  - 0 cu probabilitate 0.8; succesiunea este 000, iar starea la momentul curent S_0 deci $p(S_0/S_0) = 0.8$

  - 1 cu probabilitate 0.2; succesiunea este 001,iar starea la momentul curent S_1 deci $p(S_1/S_0) = 0.2$

  Atunci $p(S_2/S_0) = p(S_3/S_0) = 0$

- s-a transmis succesiunea de simboluri 01 (starea S_1). După ele poate urma un simbol de :
  - 0 cu probabilitate 0.5; succesiunea este 010, iar starea la momentul curent S_2 deci $p(S_2/S_1) = 0.5$
  - 1 cu probabilitate 0.5; succesiunea este 011, iar starea la momentul curent S_3 deci $p(S_3/S_1) = 0.5$

  Atunci $p(S_0/S_1) = p(S_1/S_1) = 0$
- s-a transmis succesiunea de simboluri 10 (starea S_2). După ele poate urma un simbol de :
  - 0 cu probabilitate 0.5; succesiunea este 100, iar starea la momentul curent S_0 deci $p(S_0/S_2) = 0.5$
  - 1 cu probabilitate 0.5; succesiunea este 101, iar starea la momentul curent S_1 deci $p(S_1/S_2) = 0.5$

  Atunci $p(S_2/S_2) = p(S_3/S_2) = 0$
- s-a transmis succesiunea de simboluri 11 (starea S_3). După ele poate urma un simbol de :
  - 0 cu probabilitate 0.2; succesiunea este 110, iar starea la momentul curent S_2 deci $p(S_2/S_3) = 0.2$
  - 1 cu probabilitate 0.8; succesiunea este 111, iar starea la momentul curent S_3 deci $p(S_3/S_3) = 0.8$

  Atunci $p(S_0/S_3) = p(S_1/S_3) = 0$

Folosind notaţia

$$p(S_j/S_i) = p_{ij} \text{ şi } Q = [p_{ij}$$

matricea de tranziţie Q este:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Graful de tranziţie al stărilor asociat este prezentat în figura 2.4

Dat fiind faptul că şi această matrice este stochastică (are suma elmentelor pe linie egale cu 1), rezultatul de la problema precedentă este valabil (admite stare stationară). Aflarea stării staţionare presupune rezolvarea sistemului 5 ecuaţii şi 4 necunoscute:

$$P_{st} = Q^t \cdot P_{st}$$

unde

$$P_{st} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \text{ şi } \alpha + \beta + \gamma \ + \delta = 1$$

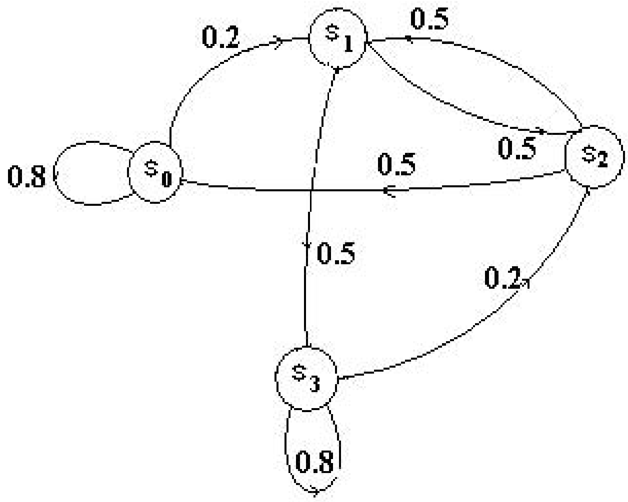

Figura 2.4: Graful de tranzitie al stărilor asociat matricei Q

Adică

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma \ + \delta = 1$$

Rezultatul obţinut la prima problema ne asigură că acest sistem este determinat; în fapt, relaţia care dă suma liniilor matricei de tranziţie 1 presupune că una dintre cele patru ecuaţii este redundantă şi, în fapt, avem un sistem de patru ecuatii cu patru necunoscute.

Sistemul se rezolvă prin metoda susbtituţiilor (Gauss). Soluţia obţinută este:

$$P_{st} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

Această soluţie verifică relaţia de staţionariate.

2.2.1 Probleme propuse

1. Să se studieze convergenţa (sunt oscilante respectiv convergente monoton sau oscilant) sursele Markov de ordinul 1 caracterizate de matricea de convergenţa si stare initială:

(a)
$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(b)
$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(c)

(d)
$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e)
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(f)
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

2. Fie o sursa Markov de ordinul 1 cu alfabet binar. Ea caracterizată de matricea de tranziţie T. În cazurile discutate până acum problema a fost de determinat vectorul staţionar dacă se ştie matricea de tranzit. De data aceasta se cere să se determine matricea de tranzit daca se ştie vectorul staţionar: $P_{st} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$
   Indicaţie Sistemul iniţial este subdeterminat şi de aceea trebuie reduse gradele de libertate prin prefixarea unor valori ale matricei de tranzit.