Capitolul 3

Canale discrete

3.1 Breviar teoretic

Canalul este cel care face legătura între sursa ce emite informaţie si utilizator. Mai precis, definim **canalul** ca fiind mediul şi aparatura necesară transmiterii unui mesaj de la sursă la utilizator.

Canalul este **discret** dacă atât spaţiul de la intrare cât şi cel de la ieşire sunt discrete. Pentru a nu amesteca noţiunile este necesar de precizat că un canal în care transmisiunea se face la momente discrete de timp se numeşte discret în timp.

Ca şi în cazul surselor există un set de parametri ce caracterizează un canal. La intrare se consideră alfabetul $[X] = [x_1, x_2 \ldots x_n]$ (de lungime n) cu setul de probabilităţi $[P_X] = [p(x_1), p(x_2) \ldots p(x_n)]$. Pe acest spaţiu se defineşte **entropia câmpului de evenimente de la intrare**:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log p(x_i) \tag{3.1}$$

Ea este o măsura a informaţiei transmisă pe canal.

La ieşire se consideră alfabetul $[Y] = [y_1, y_2 \ldots y_m]$ (de lungime m) cu setul de probabilităţi $[P_Y] = [p(y_1), p(y_2) \ldots p(y_m)]$. Pe acest spaţiu se defineşte **entropia câmpului de evenimente de la ieşire**:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log p(y_j) \tag{3.2}$$

Spre deosebire de entropia la intrare, entropia la ieşire nu da o măsură a informaţiei medii la ieşirea din canal, întrucăt nu ţine seama de independenţa între Y şi X. Un simbol y_j conţine informaţie numai în măsura în care oferă informaţie despre simbolul emis la intrare. Singura semnificaţie a lui $H(Y)$ este de a da o incertitudine medie a priori despre producerea unui simbol la ieşire.

Pentru a evalua cantitativ informaţia la ieşirea din canal se consideră spaţiul comun (reuniune a spaţiilor de intrare/ieşire)::

$$\begin{bmatrix} XY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_m \\ x_3y_1 & x_3y_2 & \dots & x_3y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

cu setul de probabilităţi:

$$\begin{bmatrix} P(XY) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_1,y_1) & p(x_1,y_2) & \dots & p(x_1,y_m) \\ p(x_2,y_1) & p(x_2,y_2) & \dots & p(x_2,y_m) \\ p(x_3,y_1) & p(x_3,y_2) & \dots & p(x_3,y_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_n,y_1) & p(x_n,y_2) & \dots & p(x_n,y_m) \end{bmatrix}$$

Evenimentul sigur este că se transmite un simbol şi se recepţionează un simbol; deci suma tuturor probabilităţilor din câmpul reunit este 1.

Un eveniment din acest spaţiu, x_iy_j înseamnă să se transmită simbolul x_i şi să se recepţioneze y_j.

Pe acest spaţiu se defineşte **entropia câmpului reunit intrare/ieşire**, care este o măsură a incertitudinii globale:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(x_i,y_j) \tag{3.3}$$

Canalul mai este caracterizat de o pereche de entropii condiţionate intrare/ieşire. Astfel, se mai definesc:

- **Echivocaţia** (entropia condiţionată $H(X/Y)$): reprezintă o incertitudine reziduală medie. Se numeşte echivocaţie pentru că este o măsură a echivocului ce există asupra intrării când se cunoaşte ieşirea . Evenimentul (x_i/y_j) reprezintă incertitudinea asupra transmiterii simbolului x_i dacă s-a recepţionat y_j. Pe scurt:

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(x_i|y_j)\log p(x_i|y_j) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(x_i|y_j) \tag{3.4}$$

- **Eroarea medie** ($H(Y/X)$): este incertitudinea (eroarea) câmpului de la iesire când se cunoaşte intrarea. Este măsură a erorii şi nu a informaţiei din acealeaşi considerente ca şi în cazul lui entropiei câmpului de la ieşire. Evenimentul $(y_j|x_i)$ reprezintă incertitudinea recepţionării simbolului y_j dacă s-a transmis x_i. Pe scurt:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\log p(y_j|x_i) \tag{3.5}$$

  Trebuie observat că ponderarea incertitudinii în aceste formule este după probabilităţile din câmpul reunit şi nu după probabilităţile condiţionate.

Se disting două cazuri particulare de canal:

- canalul fără perturbaţii $p(x_i|y_j) = p(y_j) = 1$ (se cunosc relaţiile de transmisiune) $\Longrightarrow$ $H(X/Y) = H(Y/X) = 0$.
- canalul cu perturbaţii foarte puternice ,unde se constată o independenţă a câmpului de la intrare faţă de cel de la ieşire:

$$p(x_i|y_j) = p(x_i) \Longrightarrow H(X/Y) = H(X); \tag{3.6}$$

$$p(x_i|y_j) = p(x_i) \Longrightarrow H(X/Y) = H(X); \tag{3.7}$$

Pentru a calcula entropiile sunt necesare matricele:

$$P(X/Y) = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & \dots & p(x_n|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & \dots & p(x_n|y_2) \\ p(x_1|y_3) & p(x_2|y_3) & \dots & p(x_n|y_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_1|y_m) & p(x_2|y_m) & \dots & p(x_n|y_m) \end{bmatrix}$$

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & \dots & p(y_m|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & \dots & p(y_m|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & \dots & p(y_m|x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1|x_n) & p(y_2|x_n) & \dots & p(y_m|x_n) \end{bmatrix}$$

Aceste matrici sunt stochastice, adică suma pe linii este 1.

Există relaţiile:

$$\begin{aligned} P_Y \cdot P(X/Y) &= P(X,Y) \\ P_X \cdot P(Y/X) &= P(Y,X) = P(X,Y)^t \end{aligned} \tag{3.8}$$

cu

$$P_X = \begin{bmatrix} p(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(x_n) \end{bmatrix}$$

şi

$$P_Y = \begin{bmatrix} p(y_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(y_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(y_m) \end{bmatrix}$$

Relaţii intre entropii: folosind relaţiile între matricele de probabilităţi se demonstrează următoarele relaţii între entropii (ideea este că entropiile sunt formule ce conţin logaritmi şi $\log ab = \log a + \log b$):

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X)H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y) \tag{3.9}$$

În cazul canalului fără perturbaţii:

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y) \tag{3.10}$$

În cazul canalului cu perturbaţii foarte puternice:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) \tag{3.11}$$

În plus:

$$H(X) \geq H(X/Y) \tag{3.12}$$

ceea ce semnifică faptul că informaţia medie a priori este mai mare pentru că realizarea unui eveniment (adică emisia unui simbol) produce mai multă informaţie decât în cazul în care se cunoaşte ceva (simbolul recepţionat) şi atunci informaţia produsa de realizarea unui eveniment este mai mică.

De asemenea:

$$H(Y) \geq H(Y/X) \tag{3.13}$$

Alt parametru deosebit de important este **transinformaţia**, care reprezintă valoarea medie a informaţiei mutuale transmise prin canal. Informaţia obţinută prin producerea evenimentului x_i dacă la ieşire se receptionează y_j este:

$$i(x_i, y_j) = i(x_i) - i(x_i|y_j) = \log(\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}) \tag{3.14}$$

Atunci transinformaţia este:

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i(x_i, y_j)p(x_i, y_j) \tag{3.15}$$

şi înlocuind:

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) \tag{3.16}$$

Prima parte a relaţiei de mai sus dă o explicaţie intuitivă asupra semnificaţiei transinformaţiei: aceasta este egală cu informaţia medie de dinaintea transmisiunii din care se scade informaţia medie obtinută după transmisiune; diferenţa este informaţia ce traversează canalul. Este de notat că transinformaţia fiind o măsură a informaţiei, poate lua doar valori pozitive.

Capacitatea canalului este valoarea maximă a transinformaţiei (a ceea ce se poate transmite prin canal). Maximizarea se face în raport cu setul de probabilităţi de la intrare:

$$C = \max_{(P_X)}[I(X,Y)] \tag{3.17}$$

Altfel spus capacitatea este ceea ce se transmite pe canal în cazul celei mai fericite alegeri a propbabilitălor de la intrare.

Se mai definesc:

- **Redundanţa canalului**:

$$R_c = C - I(X,Y)$$

- **Redundanţa relativa**:

$$\rho_c = 1 - \frac{I(X,Y)}{C}$$

- **Eficienţa**

$$\eta_c = \frac{I(X,Y)}{C}$$

Cazuri particulare de canal Se disting două cazuri particulare de canal:

- canalul fără perturbaţii $p(x_i|y_j) = p(y_j|x_i) = 1$ (se cunosc relaţiile de transmi- siune). În acest caz:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow H(X/Y) = H(Y/X) = 0 \\ &\Rightarrow H(X) = H(Y) \\ &\Rightarrow I(X,Y) = H(X) = H(Y) \end{aligned} \tag{3.18}$$

- canalul cu perturbaţii foarte puternice, unde se constată o independenţă a câmpului de la intrare faţă de cel de la ieşire:

$$\begin{aligned} p(x_i|y_j) = p(x_i) &\Rightarrow H(X/Y) = H(X) \\ p(y_j|x_i) = p(y_j) &\Rightarrow H(Y/X) = H(Y) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y) \\ &\Rightarrow I(X,Y) = 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2 Probleme rezolvate

1. [1] *Fie un canal discret caracterizat de matricea de tranziţie* $P(Y/X) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & X & X & X \\ X & \frac{1}{4} & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

   Stiind că canalul este de capacitate nulă să se completeze matricea de tranziţie.

   Rezolvare:

   Canalul este de capacitate nulă dacă transinformaţia, $I(X,Y)$, este nulă. Acest lucru se întâmplă dacă entropia câmpului de la ieşire este egală cu eroarea medie : $H(Y) = H(Y/X)$; fenomenul apare în cazul canalului cu perturbaţii foarte puternice. Reamintim că, în acestă situaţie ieşirea este independentă de intrare. Şi anume:

$$p(y_j|x_i) = p(y_j) \quad (\forall)i, (\forall)j$$

   Implicit:

$$p(y_j) = p(y_j|x_1) = p(y_j|x_2) = p(y_j|x_3) = p(y_j|x_4) \quad (\forall)j = 1,4$$

Ceea ce înseamnă că matricea $P(Y/X)$ are elementele de valoare egală pe fiecare coloană. Ultima coloană descompletată este obţinută din relaţia care precizează că suma elementelor de pe o line este 1. Matricea de tranzitîe astfel obţinută este:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{7}{20} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2. [8] *Fie canalul caracterizat de matricea probabilităţilor câmpurilor reunite:*

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Să se calculeze entropiile condiţionate, $H(X/Y)$ şi $H(Y/X)$.

Rezolvare: Conform relaţiilor 3.4 pentru a calcula entropiile condiţionate avem nevoie de probabilităţi de tipul $p(x_i, y_j), p(x_i|y_j)$ şi $p(y_j|x_i)$. Probabilităţile evenimentelor reunite sunt precizate în enunţ. Celelalte trebuie calculate. Pentru aceata facem apel la două formule reamintite în primul seminar: formula lui Bayes şi formula probabilitaţii totale.

Formula probabilităţii totale afirma că dacă evenimentul B are loc în una din ipotezele $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, respectiv $B = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap E)$, atunci:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B, A_i)$$

Un simbol y_j se receptionează dacă se transmite unul dintre simbolurile posibile: $x_1 \ldots x_n$; deci :

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$$

Bazându-ne pe un raţionament analog:

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$$

Deci dacă considerăm matricea probabilităţilor câmpurilor reunite, setul de probabilităti P_x se obtine sumând pe linie iar P_y sumând pe coloane. Atunci

$$p(x_1) = 0.3 \;\; p(x_2) = 0.3 \;\; p(x_3) = 0.4$$

iar

$$p(y_1) = 0.3 \;\; p(y_2) = 0.5 \;\; p(y_3) = 0.2$$

Pentru a afla evenimentele probabilităţilor condiţionate folosim formula lui Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Adică:

$$p(y_j|x_i) = \frac{p(y_j, x_i)}{p(x_i)}$$

Aplicând acest rezultat valorilor matricei $P(X,Y)$ obţinem:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

şi

$$P(X/Y) = \begin{bmatrix} p(x_1|y_1) & p(x_2|y_1) & p(x_3|y_1) \\ p(x_1|y_2) & p(x_2|y_2) & p(x_3|y_2) \\ p(x_1|y_3) & p(x_2|y_3) & p(x_3|y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

În acest moment avem calculate toate probabilitaţile necesare pentru a afla entropiile cerute:

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(y_j)p(x_i|y_j)\log p(x_i|y_j) = 7.9481\frac{\text{biţi}}{\text{simbol}}$$

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i) = 6.3364\frac{\text{biţi}}{\text{simbol}}$$

3. [1] *Să se calculeze capacitatea canalului binar cu anulari (CBA).Graful detranzitţie al acestui canal este prezentat în figura 3.1.*

   Rezolvare:
   Matricea de zgomot asociată grafului este:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-q & 0 & q \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

Relaţia 3.17 defineşte capacitatea unui canal:

$$C = \max_{P(X)} I(X,Y) = \max_{P(X)}[H(Y) - H(Y/X)]$$

unde:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j)\log p(y_j)$$

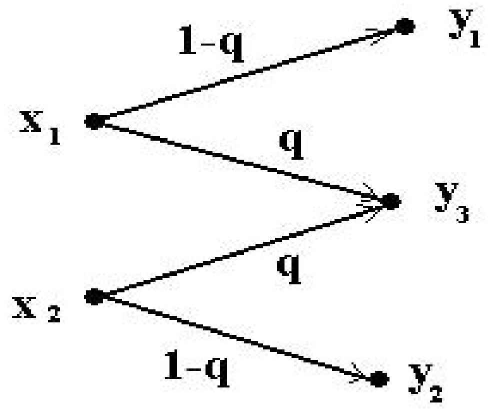

Figura 3.1: Canalul binar cu anulări

şi

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i)$$

Convenim că:

$$p(x_1) = p_1 \text{ şi } p(x_2) = p_2 \text{ cu } p_1 + p_2 = 1$$

Pentru a calcula aceste entropii avem nevoie de probabilităţile simbolurilor de la ieşire:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(y_j/x_i)p(x_i) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
p(y_1) &= p(y_1/x_1)p(x_1) + p(y_1/x_2)p(x_2) = (1-q)p_1 \\
p(y_2) &= p(y_2/x_1)p(x_1) + p(y_2/x_2)p(x_2) = (1-q)p_2 \\
p(y_3) &= p(y_3/x_1)p(x_1) + p(y_3/x_2)p(x_2) = qp_1 + qp_2 = q
\end{aligned}$$

Entropia câmpului de la ieşire este:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow H(Y) = -(1-q)p_1\log(1-q)p_1 - (1-q)p_2\log(1-q)p_2 - q\log q = \\
= -(1-q)p_1\log(1-q) - (1-q)p_1\log p_1 - \\
-(1-q)p_2\log(1-q) - (1-q)p_2\log p_2 - q\log q = \\
= -(1-q)(p_1+p_2)\log(1-q) - q(p_1+p_2)\log q + (1-q)\cdot(-p_1\log p_1 - p_2\log p_2) = \\
= -(1-q)\log(1-q) - q\log q + (1-q)H(x)
\end{aligned}$$

Eroarea medie este:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow H(Y/X) = -(1-q)p_1\log(1-q) - (1-q)p_2\log(1-q) - qp_1\log q - qp_2\log p_2 = \\
= -(1-q)\log(1-q)\cdot(p_1+p_2) - (q\log q)\cdot(p_1+p_2) = \\
= -(1-q)\log(1-q) - q\log q
\end{aligned}$$

Transinformaţia este:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X) = (1-q)\cdot H(X)$$

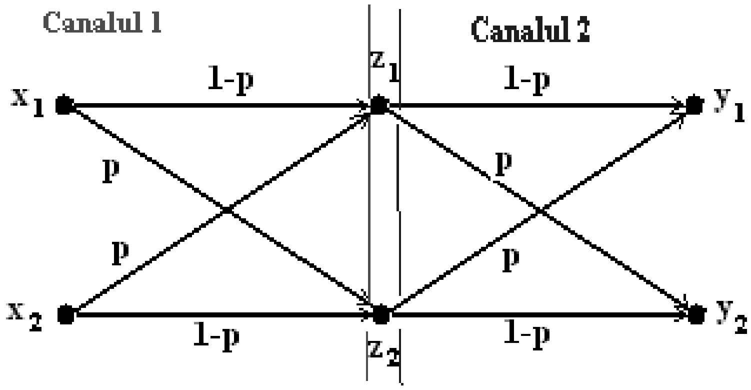

Figura 3.2: Canal rezultat prin cascadarea a doua canale binare simetrice

Capacitatea canalui este:

$$C = \max_{P(X)} I(X,Y) = \max_{p_1,p_2}(1-q)\cdot H(X) = (1-q)\cdot \max_{p_1,p_2} H(X)$$

Entropia $H(X)$ este entropia unei surse binare. Valoarea ei maximă se obtine pentru probabiltăţi egale şi este $1\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$ (vezi seminarul 1).

Rezultă capacitatea canalului binar cu anulări:

$$C = 1-q$$

Dacă reconsiderăm pe acest caz cele doua tipuri speciale de canal regăsim rezultatele enunţate în breviarul teoretic:

- canalul fără perturbaţii presupune un $q = 0$ (nu se anulează nimic). Atunci capacitatea este $C = 1$
- canalul cu perturbaţii foarte puternice presupune $q = 1$ (nu se transmite corect nimic). Atunci capacitatea este $C = 0$

4. [4] *Două canale binare simetrice cu aceeaşi capacitate C sunt legate în cascadă.*

   (a) *Care este matricea de zgomot a canalului rezultant?*

   (b) *Care este capacitatea canalului rezultant?*

   (c) *Care este aceasta capacitate pentru $p \ll 1$?*

Rezolvare:

(a) Schema celor doua canale este prezentată în figura 3.2 Matricele de zgomot ale celor doua canale sunt:

$$P(Z/X) = \begin{bmatrix} p(z_1/x_1) & p(z_2/x_1) \\ p(z_1/x_2) & p(z_2/x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$P(Y/Z) = \begin{bmatrix} p(y_1/z_1) & p(y_2/z_1) \\ p(y_1/z_2) & p(y_2/z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Matricea de zgomot a canalului rezultant este:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) \end{bmatrix}$$

Probabilitatea $p(y_j/x_i)$ este probabilitatea de a recepţiona y_j dacă a fost emis x_i. Dacă a fost emis x_i atunci se poate recepţiona fie z_1 (cu probabilitatea $p(z_1/x_i)$), fie z_2 (cu probabilitatea $p(z_2/x_i)$). Simbolul y_j se poate recepţiona dacă (intermediar) a fost emis simbolul z_1 cu probabilitatea $p(y_j/z_1)$ sau dacă a fost emis simbolul z_2 cu probabilitatea $p(y_j/z_2)$. Atunci probabilitatea $p(y_j/x_i)$ este:

$$p(y_j/x_i) = p(y_j/z_1) \cdot p(z_1/x_i) + p(y_j/z_2) \cdot p(z_2/x_i)$$

Setul de probabilităţi $p(y_j/x_i)$ este:

$$\begin{aligned}
p(y_1/x_1) &= p(y_1/z_1) \cdot p(z_1/x_1) + p(y_1/z_2) \cdot p(z_2/x_1) \\
p(y_2/x_1) &= p(y_2/z_1) \cdot p(z_1/x_1) + p(y_2/z_2) \cdot p(z_2/x_1) \\
p(y_1/x_2) &= p(y_1/z_1) \cdot p(z_1/x_2) + p(y_1/z_2) \cdot p(z_2/x_2) \\
p(y_1/x_1) &= p(y_2/z_1) \cdot p(z_1/x_2) + p(y_2/z_2) \cdot p(z_2/x_2)
\end{aligned}$$

Aceste relaţii se pot scrie comprimat folosind operaţii matriceale:

$$P(Y/X) = P(Y/Z) \cdot P(Z/X)$$

Matricea de tranziţie echivalentă unei serii de canale înlănţuite în cascadă este produsul, de la iesîre spre intrare a matricilor de tranziţie individuale.
Rezultă că:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2p+2p^2 & 2p-2p^2 \\ 2p-2p^2 & 1-2p+2p^2 \end{bmatrix}$$

Se poate observa că prin cascadarea a două canale binare simetrice cu probabilitate de eroare p se obţine un canal binar simetric cu probabiliate de eroare $q = 2p - 2p^2$.

(b) Capacitatea canalului binar simetric rezultat este C_r:

$$\begin{aligned}
C_r &= 1 + q \log q + (1-q)\log(1-q) \\
&= 1 + (2p-2p^2)\log(2p-2p^2) + (1-2p+2p^2)\log(1-2p+2p^2)
\end{aligned}$$

(c) Dacă probabilitatea de eroare este foarte mica, $p \ll 1$ putem face aproximarea $p^2 \simeq 0$. Rezultă:

$$C_r = 1 + 2p \log 2p + (1-2p)\log(1-2p)$$

5. [2] *Un canal este caracterizat de matricea de zgomot*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Să se calculeze capacitatea canalului.

Rezolvare:
Câmpul de intrare are două elemente: x_1 şi x_2. Câmpul de la ieşire are patru elemente: y_1, y_2, y_3 şi y_4.

Se poate observa că fiecare simbol are aceeaşi probabilitate de a se recepţiona corect ($p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = p_0 = \frac{1}{2}$) şi acelaşi set de probabilităţi de eronare: $p_1 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}, p_4 = \frac{1}{8}$. Capacitatea unui canal este dată de ecuaţiia 3.17:

$$C = \max_{(P_X)}[I(X,Y)] = \max_{(P_X)}[H(Y) - H(Y/X)]$$

Probabiltăţile câmpului de ieşire sunt:

$$p(y_1) = p_1 p(x_1) + p_4 p(x_2) = \frac{1}{2}p(x_1) + \frac{1}{8}p(x_2)$$

$$p(y_2) = p_2 p(x_1) + p_3 p(x_2) = \frac{1}{4}p(x_1) + \frac{1}{8}p(x_2)$$

$$p(y_1) = p_3 p(x_1) + p_2 p(x_2) = \frac{1}{8}p(x_1) + \frac{1}{4}p(x_2)$$

$$p(y_1) = p_4 p(x_1) + p_1 p(x_2) = \frac{1}{8}p(x_1) + \frac{1}{2}p(x_2)$$

Entropia câmpului de la ieşire este:

$$\begin{aligned}
H(Y) = &- \sum_{j=1}^{4} p(y_j)\log p(y_j) = \\
= &- [(p_1 p(x_1) + p_4 p(x_2))\log(p_1 p(x_1) + p_4 p(x_2)) + \\
&+ (p_2 p(x_1) + p_3 p(x_2))\log(p_2 p(x_1) + p_3 p(x_2)) + \\
&+ (p_3 p(x_1) + p_2 p(x_2))\log(p_3 p(x_1) + p_2 p(x_2)) + \\
&+ (p_4 p(x_1) + p_1 p(x_2))\log(p_4 p(x_1) + p_1 p(x_2))]
\end{aligned}$$

Eroarea medie este:

$$\begin{aligned}
H(Y/X) = &- \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{2} p(y(j)/x_i)p(x_i)\log p(y_j/x_i) = \\
&= p_1 p(x_1)\log p_1 + p_2 p(x_1)\log p_2 + p_3 p(x_1)\log p_3 + p_4 p(x_1)\log p_4 + \\
&+ p_4 p(x_2)\log p_4 + p_3 p(x_2)\log p_3 + p_2 p(x_2)\log p_2 + p_1 p(x_2)\log p_1 = \\
&= (p(x_1) + p(x_2))(p_1\log p_1 + p_2\log p_2 + p_3\log p_3 + p_4\log p_4) = \text{constant}
\end{aligned}$$

Se poate observa că eroarea medie nu depinde de setul de probabilităti la intrare. Rezultă că:

$$C = \max_{(P_X)}[H(Y) - H(Y/X)] = \max_{(p(x_1),p(x_2))}[H(Y)] - H(Y/X)$$

$$\begin{aligned}H(Y)=&-[p_1p(x_1)\log(p_1p(x_1)+p_4p(x_2))+\\&+p_2p(x_1)\log(p_2p(x_1)+p_3p(x_2))+\\&+p_3p(x_1)\log(p_3p(x_1)+p_2p(x_2))+\\&+p_4p(x_1)\log(p_4p(x_1)+p_1p(x_2))+\\&+p_4p(x_2)\log(p_1p(x_1)+p_4p(x_2))+\\&+p_3p(x_2)\log(p_2p(x_1)+p_3p(x_2))+\\&+p_2p(x_2)\log(p_3p(x_1)+p_2p(x_2))+\\&+p_1p(x_2)\log(p_4p(x_1)+p_1p(x_2))]\end{aligned}$$

Se observă ca H(Y) este o funcţie simetrică i $p(x_1)$ şi $p(x_2)$. Consecinţa logică este că maximul ei se obţine pentru $p(x_1)=p(x_2)=\frac{1}{2}$. Acest lucru se poate verifica şi prin calcul direct (derivând şi apoi egalând cu zero).

Entropia câmpului de la ieşire devine:

$$\begin{aligned}H(Y)=&-[\frac{1}{2}p_1\log\frac{1}{2}(p_1+p_4)+\frac{1}{2}p_2\log\frac{1}{2}(p_2+p_3)+\\&+p_3\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}(p_3+p_2)+\frac{1}{2}p_4\log\frac{1}{2}(p_4+p_1)+\\&+\frac{1}{2}p_4\log\frac{1}{2}(p_1+p_4)+\frac{1}{2}p_3\log\frac{1}{2}(p_2+p_3)+\\&+\frac{1}{2}p_2\log\frac{1}{2}(p_3+p_2)+\frac{1}{2}p_1\log\frac{1}{2}(p_4+p_1)]=\\&-[2(p_1+p_4)\log\frac{1}{2}(p_1+p_4)+2(p_3+p_2)\log\frac{1}{2}(p_3+p_2)]\end{aligned}$$

Rezultă capacitatea canalului ca fiind:

$$C=-2(p_1+p_4)\log\frac{1}{2}(p_1+p_4)-2(p_3+p_2)\log\frac{1}{2}(p_3+p_2)+\sum_{i=1}^{4}p_i\log p_i$$

3.3 Probleme propuse

1. [2] Care este structura spaţiului produs intrare/iesire P(X,Y) pentru un canal fără perturbaţii? Dar pentru un canal cu perturbaţii foarte puternice?

2. [2] Să se calculeze entropiile condiţionate $H(X/Y)$ şi $H(/X)$ ale canalului caracterizat de matricea câmpurilor reunite:

$$P(X,Y)=\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0\\0.2 & 0.3 & 0.1\\0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

3. [2] Fie matricea de zgomot a unui canal de forma:

$$P(Y/X)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & x\\y & \frac{2}{3} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

(a) Să se completeze matricea de zgomot.

(b) Dacă distribuiţia probabilităţilor alfabetului de intrare este uniformă, să se scrie matricea de probabilităţiu a spaţiului produs intrare/ieşire.

4. [8] Matricea câmpurilor reunite ale unui canal discret este de forma:

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Să se deseneze graful de tranziţie echivalent al canalului.Să se calculeze: $H(X), H(Y), H(X/Y), H(Y/X), H(X,Y), I(X,Y)$.

5. [8] Se consideră canalul caracterizat de matricea de zgomot:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-q & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) În ce condiţii (cât trebuie să fie probabilităţile la intrare) pentru ca entropia la ieşire să fie maximă.

(b) Cât trebuie să fie p şi q astfel încât entropia câmpurilor reunite să fie maximă, în cazul distribuţiei uniforme la intrare?

6. [2] Un canal de transmisiune se caracterizează prin matricea de zgomot

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0.1 & 0.75 & 0.15 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La intrarea în canal se aplică simbolurile x_1, x_2, x_3 cu probabilităţile $p(x_1) = 0.7, p(x_2) = 0.2, p(x_3) = 0.1$ Se cere:

(a) cantitatea medie de informaţie care este furnizată de un smbol emis ($H(X)$)

(b) cantitatea de informaţie care se pierde la transmisiunea unui mesaj format din $n_0 = 400$ de simboluri ($n_0 \cdot H(Y/X)$)

(c) cantitatea de informaţie recepţionată în condiţiile de la (b)($H(Y)$)

7. [2] Fie un canal binar simetric cu matricea de transfer:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Să se calculeze capacitatea canalului. Pentru ce valori ale lui p capacitatea este minimă/maximă?

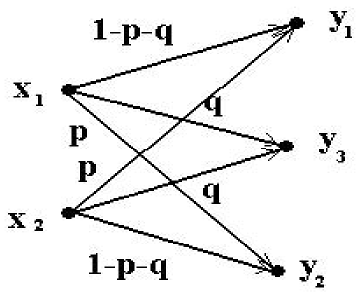

Figura 3.3: Canalul binar cu erori si anulări

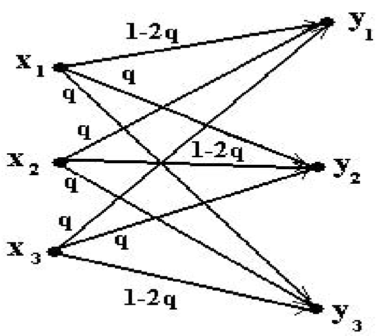

Figura 3.4: Canalul ternar simetric

8. [5] Să se calculeze capacitatea canalului binar cu erori şi anulari (vezi figura 3.3). Să se particularizeze rezultatul pentru canalul binar simetric ($q = 0$) şi pentru canalul binar cu anulări ($p = 0$).
   Matricea de zgomot este:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p-q & p & q \\ p & 1-p-q & q \end{bmatrix}$$

   Răspuns:
   Capacitatea $C = 1 - q + p \log p - (1-q) \log(1-q) + (1-p--q) \log(1-p-q)$

9. Să se calculeze capacitatea canalului ternar simetric (vezi figura 3.4). Matricea de zgomot asociată este:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-2q & q & q \\ q & 1-2q & q \\ q & q & 1-2q \end{bmatrix}$$

   Să se generalizeze pentru canalul "n-ar" simetric.
   Răspuns:

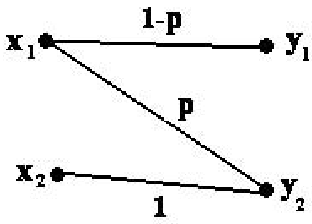

Figura 3.5: Canalul Z

Capacitatea $C = \log 3 - 2q \log q - (1 - 2q) \log(1 - 2q)$

10. [5] Să se calculeze capacitatea canalului Z (vezi figura 3.5). Matricea de zgomot asociată este:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicaţie: p_1 pentru care se obţine valoarea maximă a transinformaţiei este:

$$p_1 = \frac{1}{1 + (1-p) \cdot p^{\frac{p}{1-p}}}$$

11. Să se calculeze capacitatea canalului dat de matricea de zgomot:

$$P(Y/X) = \begin{bmatrix} 1-q & 0 & 0 & q \\ 0 & 1-q & 0 & q \\ 0 & 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

Bibliografie

[1] Mihai Ciuc. "Note de seminar".

[2] A. T. Murgan, I. Spânu, I. Gavăt, I. Sztojanov, V. E. Neagoe, şi A. Vlad. *Teoria Transmisiunii Informatîei - probleme*. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, România, 1983.

[3] Alexandru Spătaru. *Teoria Transmisiunii Informatţiei*. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, România, 1983.

[4] Alexandru Spătaru. *Fondements de la theorie de la transmisssion de línformation*. Presses polytechniques romandes, Lausanne, Elveţia, 1987.

[5] Rodica Stoian. "Note de seminar".

[6] Dan Alexandru Stoichescu. "Note de seminar".

[7] Eugen Vasile. "Note de seminar".

[8] Constantin Vertan. "Note de seminar".